

INTERPRETAZIONE DELLA VARIABILITÀ SPAZIALE DELLE PIOGGE INTENSE TRAMITE FUNZIONI COPULA

Matteo Balistrocchi¹ & Giovanna Grossi¹

(1) Dipartimento di Ingegneria Civile Architettura Territorio Ambiente e di Matematica (DICATAM), via Branze 43, 25123, Brescia.

ASPETTI CHIAVE

- Le funzioni copula hanno ampliato significativamente i margini di inferenza statistica rendendo più rigorosa la procedura di derivazione di distribuzioni congiunte
- L'applicazione di tali procedure ad osservazioni pluviometriche effettuate in località diverse di un bacino rende possibile una più approfondita interpretazione della loro variabilità spaziale
- L'analisi preliminare dei dati di pioggia osservati attraverso la rete di monitoraggio del bacino del fiume Taro (PR) ha dato risultati incoraggianti

1 PREMESSA

L'interpolazione spaziale di altezze di precipitazione a scala di evento, partendo da osservazioni a terra mediante pluviometri o da rilevamenti radar, costituisce tuttora un importante campo di ricerca della disciplina idrologica. In questo ambito, gli approcci di tipo stocastico, o statistico, tra i quali è da ricordare principalmente il kriging (Krige, 1966), trovano diffusa applicazione in virtù della loro più agevole applicabilità rispetto ad altri fisicamente basati (Rodríguez-Iturbe & Mejía, 1974; Badas et al., 2005). Allo scopo di superare alcune limitazioni ed incertezze che comunque affliggono tali approcci, l'impiego di funzioni copula è stato recentemente suggerito da Bardossy & Pegram (2009).

Tali funzioni consentono infatti di derivare distribuzioni multivariate stimando separatamente le funzioni di probabilità marginali e la struttura di dipendenza, la quale è rappresentata esclusivamente dalla funzione copula (Joe, 1997; Nelsen, 2006; Salvadori et al., 2007). La distribuzione congiunta è successivamente ricavata implementando le marginali nella funzione copula stessa. Il vantaggio principale risiede nel fatto che i margini di inferenza statistica sono significativamente ampliati, avendo la possibilità di implementare in un unico modello probabilistico marginali anche complesse, diverse tra loro e non appartenenti alla medesima famiglia della funzione copula. Dalla procedura di stima sono inoltre eliminate scelte arbitrarie, quali le trasformazioni preliminari delle variabili analizzate, quasi sempre necessarie allo scopo di adattarne la distribuzione campionaria alle marginali imposte dalla distribuzione congiunta prescelta.

Allo stato attuale, le funzioni copula disponibili permettono di rappresentare molteplici strutture di dipendenza e sono già stati proposti vari test statistici in grado di valutare quantitativamente il grado di adattamento delle funzioni teoriche scelte a quelle empiriche (Genest et al., 2009). Tecniche di simulazione già consolidate permettono di generare un numero elevato di campioni di eventi e valutare così l'incertezza di stima delle variabili analizzate. La superiorità di questo approccio rispetto a quello più diffuso del metodo kriging, è perciò evidente se si considera come, nel primo, sia possibile ricostruire una distribuzione di probabilità completa, mentre nel secondo ci si limiti a tenere in considerazione unicamente un indice statistico sintetico, la cui stima è peraltro affetta dal comportamento delle marginali. La possibilità di impiegare modelli probabilistici qualsivoglia svincola, inoltre, dalla necessità di ricorrere a quello normale.

Appare pertanto interessante valutare la possibilità di sviluppare una metodologia di disaggregazione spaziale basata su questo tipo di approccio, con l'obiettivo di ricavare dei modelli stocastici più affidabili e maggiormente aderenti alla naturale variabilità delle grandezze osservate, ma che comunque mantengano un ridotto onere computazionale.

2 MATERIALI E METODI

Un caso di studio opportuno per l'analisi di campi di precipitazione è offerto dal bacino del fiume Taro (PR), affluente di destra del fiume Po. L'area complessivamente drenata, circa 2026 km² allo sbocco (vedi figura 1a), è contraddistinta da una significativa componente montana che presenta la peculiarità di essere

suddivisa in due sottobacini, quello del fiume Taro vero e proprio e quello del suo principale affluente il torrente Ceno, i quali alla loro confluenza presentano aree contribuenti e morfologie paragonabili.

Il bacino è monitorato per mezzo di una rete idro-meteorologica gestita da ARPA Emilia Romagna, vedi figura 1a). Tale rete presenta 21 pluviometri ricadenti nel bacino, grazie ai quali sono state ricavate altrettante serie continue di precipitazioni semi-orarie, registrate in un periodo di dieci anni dal 2003 al 2012. L'analisi della distribuzione spaziale delle altezze di precipitazione associate a piene particolarmente gravose ha consentito di evidenziare come, durante questo tipo di eventi, la distribuzione spaziale assuma caratteristiche ricorrenti (Balistrocchi et al., 2014). In figura 1b) si rappresentano le linee di livello tipiche del rapporto tra l'altezza di precipitazione puntuale e quella media areale associate a questi eventi: si è potuto osservare come la distribuzione spaziale, sebbene prevalentemente orografica, risenta anche dell'esposizione dei versanti e della presenza dello spartiacque interno, inoltre, come i due bacini del Ceno e del Taro montano siano stati soggetti ad afflussi concomitanti e paragonabili per entità, dando luogo ad una contemporaneità dei colmi di piena.

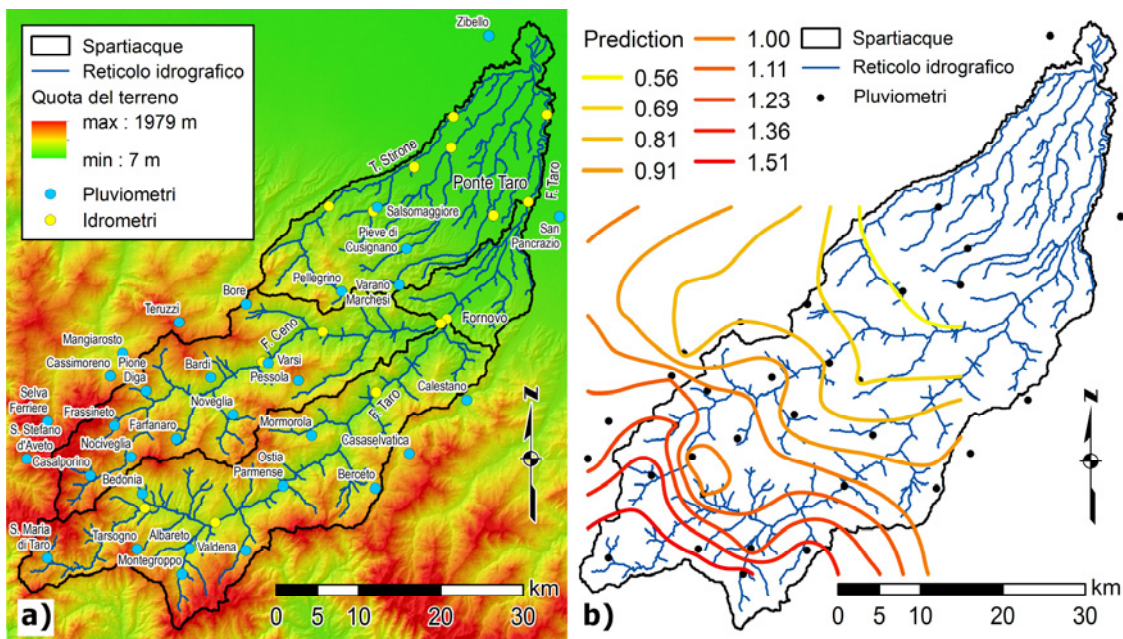


Figura 1. Bacino del fiume Taro chiuso in alcune sezioni significative e rete di monitoraggio pluvio-idrometrico a); distribuzione tipica delle altezze di precipitazione associate a piene gravose espressa come rapporto tra l'altezza puntuale e quella media areale b).

Dalle serie temporali continue è possibile isolare eventi di precipitazione distinti attraverso due parametri: un tempo minimo di inter-evento IETD ed una soglia di altezza di precipitazione h_0 . Tali parametri devono essere scelti in modo da assicurare che i singoli eventi risultino tra loro indipendenti e significativi in relazione agli obiettivi dell'analisi. Dovendo studiare la struttura spaziale di eventi contemporanei distribuiti nello spazio, si è reso necessario individuare una stazione di riferimento, rispetto alla quale definire le durate di tempo piovoso. In riferimento a questi intervalli temporali, sono state valutate le altezze di precipitazione nelle altre stazioni. La scelta della stazione di riferimento è caduta su Ostia Parmense, vedi figura 1a), in posizione abbastanza baricentrica rispetto al bacino montano del corso principale del fiume Taro.

La distribuzione congiunta $P_{H_1H_2}$ che lega due altezze di precipitazione h_1 ed h_2 verificatesi in località distinte può essere espressa, in accordo con il teorema di Sklar (1959), nei termini indicati dalla relazione (1), ovvero combinando le corrispondenti distribuzioni marginali P_{H_1} e P_{H_2} attraverso la funzione copula C .

$$P_{H_1H_2}(h_1, h_2) = C(P_{H_1}(h_1), P_{H_2}(h_2)) \quad (1)$$

Una funzione copula che ha mostrato un soddisfacente grado di adattamento a campioni di altezze di precipitazione in alcuni regimi pluviometrici italiani è stata la copula di Gumbel-Hougaard (Balistrocchi & Bacchi, 2011), la cui espressione bivariata è riportata nell'equazione (2), nella quale le variabili uniformi u e v sostituiscono le corrispondenti variabili naturali h_1 e h_2 . Si tratta di una copula archimedea e quindi

caratterizzata da un unico parametro θ , detto di dipendenza, il cui valore è funzione del grado di associazione delle variabili stimabile, ad esempio, attraverso il coefficiente di correlazione di rango proposto da Kendall (Salvadori et al., 2007).

$$C(u, v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\} \quad (2)$$

Questa copula è in grado di rappresentare solo associazioni positive ed include la copula indipendenza, quando θ è unitario, e tende alla copula limite superiore, ovvero alla perfetta dipendenza co-monotona, quando θ tende ad infinito. Essa è inoltre contraddistinta da un coefficiente di dipendenza di coda superiore diverso da zero, mentre quello della coda inferiore è nullo. Ciò implica che i campioni rappresentabili attraverso questa copula sono fortemente associati negli eventi estremi, ma più dispersi in quelli minori.

Nell'intento di applicare le funzioni copula all'analisi dei campi di precipitazione è quindi conveniente esprimere la struttura della relazione spaziale non attraverso un semi-variogramma (o correlogramma), bensì attraverso una funzione del coefficiente di Kendall in ragione della distanza tra le località di interesse, in caso di campo isotropo, e, nel caso di un campo anisotropo, dell'orientamento. L'analisi bivariata è propedeutica alla costruzione di copule di dimensione superiore, secondo tecniche condizionali o ad albero "vine" (Bedford & Cooke, 2001). Questo si rende necessario affinché la stima del valore assunto dalla precipitazione in una data località possa essere effettuata in relazione ad certo numero di altezze di precipitazione, osservate presso stazioni ricadenti nell'intorno.

Le distribuzioni marginali sono state rappresentate attraverso il modello di Weibull (3) utilizzando tre parametri: quello di forma β , quello di scala ζ ed il limite inferiore h_0 . In particolare, quest'ultimo consente di tenere in considerazione la probabilità che un evento pluviometrico osservato nella stazione di riferimento non corrisponda ad un evento in un'altra stazione. Il parametro di forma invece, agendo principalmente sulla moda, rende la distribuzione estremamente versatile.

$$P_H = 1 - \exp\left\{-\left[(h - h_0)/\zeta\right]^\beta\right\} \quad (3)$$

3 RISULTATI E DISCUSSIONE

L'interpretazione della struttura spaziale dell'associazione tra i campioni di eventi indipendenti di precipitazione individuati è stata effettuata rappresentando l'andamento del coefficiente di Kendall τ_K al variare della distanza tra i pluviometri, come mostrato in figura 2 per alcune combinazioni di IETD e h_0 . Non essendo emersa infatti un'apprezzabile anisotropia del campo, non si è reso necessario tenere in considerazione il fattore dell'orientamento. In generale, come era intuitivo attendersi, il grado di associazione tende a diminuire con la distanza; tuttavia, per i valori di IETD e h_0 ragionevoli, τ_K mantiene ugualmente valori superiori a 0,20, denotando un grado di associazione non completamente trascurabile anche tra le stazioni più lontane.

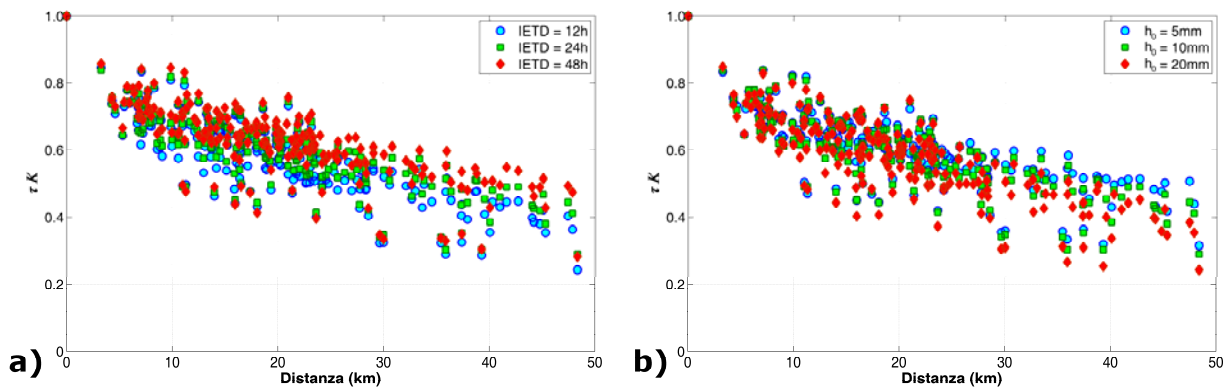


Figura 2. Sensitività di τ_K al variare di IETD ed h_0 a) $h_0 = 10$ mm e IETD variabile, b) IETD = 24 h e h_0 variabile.

Se si confrontano inoltre il quadro a) e b), si può osservare come gli incrementi di IETD e di h_0 producano effetti opposti. Nel primo caso, presso la stazione di riferimento si determina l'aggregazione degli scrosci in eventi di volume e durata sempre maggiore, riducendo quindi la probabilità che nelle altre stazioni non siano osservati eventi di precipitazione. Questo porta ad avere, specialmente per le distanze maggiori, valori τ_K di superiori. Nel secondo caso, si tendono a privilegiare nella stazione di riferimento eventi brevi ed intensi i quali, essendo in generale associati a fenomeni più localizzati, trovano meno facilmente corrispondenza in eventi occorsi in stazioni più lontane. La tendenza alla riduzione di τ_K con la distanza è pertanto più rapida.

Un esempio dell'adattamento offerto dalla copula di Gumbel-Hougaard è mostrato in figura 3a) tra i campioni ricavati per Ostia Parmense e Mormorola (IETD = 12 h; $h_0 = 10$ mm); ciò porta ad un numero medio di eventi annui di 27,3. La bontà di adattamento è suffragata anche da idonei test statistici ed appare di generale applicabilità a tutte le coppie di stazioni. La figura 3b) mostra le densità di probabilità delle altezze osservate alla stazione di Mormorola, condizionata ai valori assunti alla stazione di Ostia Parmense. Per valori bassi di precipitazione si osserva l'insorgere di una non trascurabile massa di probabilità nell'origine, corrispondente ad un evento nullo. Il confronto tra i valori realmente osservati e quelli estratti dalla distribuzione condizionata evidenziano come la moda porti ad errori medi di stima minori rispetto a mediana e media (nel caso illustrato in figura 3, rispettivamente 0,15 mm, -0,66 mm e -2,96 mm).

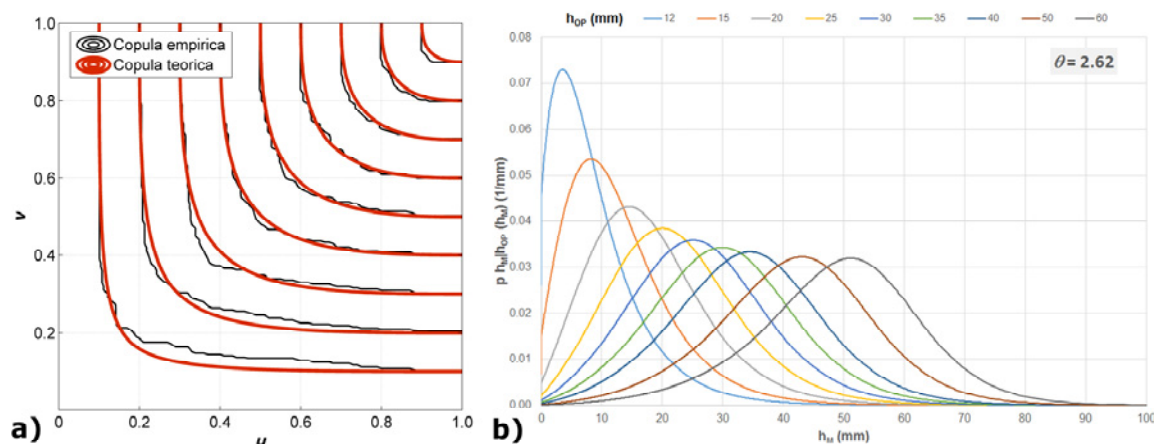


Figura 3. Adattamento della copula di Gumbel-Hougaard a quella empirica per i campioni di Mormorola e Ostia Parmense IETD=12 h $h_0=10$ mm a); distribuzioni dell'altezza di precipitazione a Mormorola h_M condizionata a quella di Ostia Parmense h_{Op} b).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Badas, M.G., Deidda, R. & Piga E. Orographic influences in rainfall downscaling, *Adv. Geosciences*, 2005, 2, 285-92.
- Balistrocchi, M., & Bacchi, B. Modelling the statistical dependence of rainfall event variables through copula functions, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 2011, 15, 1959-77.
- Balistrocchi, M., Pecora, S. & Grossi, G. Analisi della variabilità spaziale delle precipitazioni intense in bacini montani: una decade di monitoraggio, *Atti del XXXIV Convegno Nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Bari, 2014.
- Bardossy, A. & Pegram, G. Copula based multisite model for daily precipitation simulation, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 2009, 13, 2299-314.
- Bedford, T. & Cooke, R.M. Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines, *Ann. Math. Artif. Intel.*, 2001, 32, 245-68.
- Chua, S.H. & Bras, R.L. Optimal estimation of mean areal precipitation in regions of orographic influence, *J. of Hydrol.*, 1982, 57, 713-28.
- Genest, C., Rémilland, B. & Beaudoin, D. Goodness-of-fit tests for copulas: a review and a power study, *Insur. Math. Econ.*, 2009, 44, 199-213.
- Krige, D.G. Two dimensional weighted moving average trend surfaces for ore evaluation. *J. S. Afr. I. Min. Metall.*, 1966, 66, 13-38.
- Joe, H. *Multivariate models and dependence concepts*, Chapman and Hall, London, 1997.
- Nelsen, R.B. *An introduction to copulas*, second ed., Springer, New York, 2006.
- Rodriguez-Iturbe, I. & Mejia, J. M. The design of rainfall networks in time and space, *Water Resour. Res.*, 1974, 10, 713-28.
- Salvadori, G., De Michele, C., Kotegoda, N. T. & Rosso, R. *Extremes in nature: an approach using copulas*, Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2007.
- Sklar, A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 1959, 8, 229-31.